Análisis Matemático I

1. Sean $F \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto no vacíos y disjuntos $F \cap K = \emptyset$. Sea $\| \ \|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Prueba que hay puntos $\mathbf{a} \in F$ y $\mathbf{b} \in K$ tales que
$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \text{ínf}\,\{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| : \mathbf{x} \in F,\ \mathbf{y} \in K\}$$

2. Sean $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ campos escalares definidos en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sea $\mathbf{a} \in \Omega$ y supongamos que f es diferenciable en $\mathbf{a}$, $f(\mathbf{a}) = 0$ y g es continua en $\mathbf{a}$. Prueba que fg es diferenciable en $\mathbf{a}$.

3. Prueba que el campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido por $f(0,0) = 0$ y
$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x \operatorname{sen} y - xy}{x^2 + y^2} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$
es de clase $\mathcal{C}^1$ en $\mathbb{R}^2$. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$ e indica si es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

4. Clasifica los puntos críticos del campo escalar
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz - x - y - z$$

5. Teorema de Riesz.

Granada, 15 de diciembre de 2015